WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER MARTIN-LUTHER-UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG

Wiss. Z. Univ. Halle • Math.-Nat. XII/3, S. 251–258 • März 1963 || Manuskr. eing.: 29. 1. 1963 • Als Manuskript gedruckt

Aus dem I. Mathematischen Institut
Direktoren: Prof. Dr. Ott-Heinrich Keller / Prof. Dr. Herbert Grötzsch

Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knotenzahl

Paul Erdös und Horst Sachs*)

I. Eine Abschätzung für die minimale Knotenzahl regulärer Graphen, welche keinen Kreis der Länge $< l$ enthalten

$G^{(n)}$ sei ein Graph mit n Knotenpunkten; Knotenpunkte von $G^{(n)}$ werden mit $x_1, \ldots, y, \ldots$, Kanten werden mit (x_i, x_j) bezeichnet. Schlingen und Zweiecke werden nicht zugelassen. Die Valenz (oder Ordnung) $v(x)$ eines Knotenpunktes x von $G^{(n)}$ ist die Anzahl der Kanten, die mit x inzidieren. Es sei $G^{(n)}$ ein Graph mit den Knotenpunkten $x_1, \ldots, x_n$, welcher die Kante (x_i, x_j), aber keine Kante (x_r, x_s) enthält; $(G^{(n)} - (x_i, x_j) + (x_r, x_s))$ wird aus $G^{(n)}$ erhalten, indem wir die Kante (x_i, x_j) weglassen und die Kante (x_r, x_s) hinzufügen. Ein Kreis ist ein einfach geschlossener Kantenzug. Die Entfernung (oder der Abstand) $e(G^{(n)}; x_i, x_j)$ von x_i und x_j in $G^{(n)}$ sei die Länge des kürzesten Kantenzuges, welcher x_i und x_j verbindet (die Länge eines Kantenzuges oder Kreises ist die Anzahl der im Kantenzuge oder Kreise vorkommenden Kanten). Die Länge eines kürzesten in $G^{(n)}$ vorkommenden Kreises bezeichnen wir als die Taillenweite von $G^{(n)}$. $K(x, r)$ sei die Menge aller Knotenpunkte, die man von x aus durch einen Kantenzug der Länge $\leqq r$ erreichen kann (wir sollten eigentlich $K(G^{(n)}; x, r)$ schreiben, tun dies aber nicht, da wir dieses Symbol so benutzen werden, daß in diesem Falle kein Mißverständnis entstehen kann). $\overline{S}$ sei die Anzahl der Elemente einer Menge S.

*

$f(k, l)$ sei die kleinste Zahl, für welche ein regulärer Graph $G^{(n)}$ der Valenz k mit $n = f(k, l)$ existiert, so daß jeder Kreis von $G^{(n)}$ mindestens die Länge l hat (d. h. die Taillenweite von $G^{(n)}$ sei $\geqq l$). Es ist klar, daß $f(2, l) = l$ ist und daß $f(k, 3) = k + 1$ ist (da ein regulärer Graph der Valenz k mindestens $k + 1$ Knotenpunkte hat). Für $k > 2$, $l > 3$ ist aber die Bestimmung von $f(k, l)$ ein schwieriges Problem, welches bisher nur für spezielle Werte von k und l gelöst ist. Kürzlich erhielt Sachs [4] eine obere Abschätzung für $f(k, l)$, die er aber für sehr schlecht hält. Auf seine Anregung gelang es mir, für $f(k, l)$ recht gute untere und obere Abschätzungen zu erhalten. Es gilt nämlich folgender

Satz 1: *Für jedes $k \geqq 2$, $l \geqq 3$ ist*

$$1 + k \sum_{t=0}^{\left[\frac{l-3}{2}\right]} (k-1)^t \leqq f(k, l) \leqq 4 \sum_{t=1}^{l-2} (k-1)^t. \tag{1}$$

Für $k = 2$ sowie für $l = 3$ ist (1) gewiß richtig, so daß wir für das Folgende $k > 2$ und $l > 3$ voraussetzen dürfen.

Zuerst wollen wir die untere Abschätzung in (1) beweisen. Wir werden nur $v(x) \geqq k$ (für alle Knotenpunkte von $G^{(n)}$) benutzen. Es sei x ein beliebiger Knotenpunkt von $G^{(n)}$; jeder Knotenpunkt von $K\left(x, \left[\frac{l-1}{2}\right]\right)$ kann von x durch genau einen Kantenzug der Länge $\leqq \left[\frac{l-1}{2}\right]$ erreicht werden, da sonst $G^{(n)}$ einen Kreis der Länge $< l$ enthielte. Da jeder Knotenpunkt von $G^{(n)}$ eine Valenz $\geqq k$ hat, zeigt ein leichter Induktionsschluß nach r, daß für alle r mit $1 \leqq r \leqq \left[\frac{l-1}{2}\right]$

$$\overline{K(x, r)} \geqq 1 + k \sum_{t=0}^{r-1} (k-1)^t \tag{2}$$

gilt. Die untere Abschätzung von (1) folgt sofort, wenn in (2) $r = \left[\frac{l-1}{2}\right]$ gesetzt wird.

*) Teil I geht wesentlich auf den erstgenannten, Teil II auf den zweitgenannten Verfasser zurück.

Nun wollen wir die obere Abschätzung beweisen. Wir beweisen die folgende etwas schärfere Aussage:

Es sei $k \geqq 2$, $l \geqq 4$, $m \geqq 2 \sum_{t=1}^{l-2} (k-1)^t$. *Dann gibt es einen regulären* $G^{(2m)}$ *der Valenz* k, *dessen Kreise alle eine Länge* $\geqq l$ *haben.*

Wir beweisen diesen Satz für festes l durch Induktion nach k. Für $k = 2$ ist alles trivial, $G^{(2m)}$ sei einfach ein Kreis der Länge $2m$ ($2m > l$ ist klar). Nehmen wir an, daß unser Satz für $k-1$ schon bewiesen sei, wir wollen ihn dann für k beweisen. $G^{(n)}(k, l)$ bezeichne im Folgenden stets einen regulären Graphen der Valenz k und der Taillenweite $\geqq l$ mit genau n Knotenpunkten. Nach unserer Induktionsannahme existiert ein Graph $G^{(2m)}(k-1, l)$. $G^{(2m)}$ sei nun ein Graph, der folgende drei Eigenschaften hat:

(I) $k - 1 \leqq v(x) \leqq k$ *für alle* $2m$ *Knotenpunkte.*

(II) *Alle Kreise haben eine Länge* $\geqq l$.

(III) *Unter allen Graphen, die* (I) *und* (II) *befriedigen, sei die Anzahl der Kanten von* $G^{(2m)}$ *maximal.*

Da $G^{(2m)}(k-1, l)$ (I) und (II) befriedigt, ist klar, daß $G^{(2m)}$ *existiert.* Wir wollen zeigen, daß für $G^{(2m)}$ $v(x) = k$ für alle x ist, daß also $G^{(2m)}$ von der Valenz k ist, und hiermit wird alles bewiesen sein.

Zunächst wollen wir zeigen, daß $G^{(2m)}$ höchstens einen Knotenpunkt der Valenz $< k$ enthalten kann. Da dieser Beweis aber nicht ganz einfach ist, wollen wir erst zeigen, daß daraus schon die Regularität von $G^{(2m)}$ folgt. Wegen (I) müßte der Ausnahmepunkt die Valenz $k - 1$ haben. Das geht aber nicht, da die Anzahl der Knotenpunkte ungerader Valenz bekanntlich gerade sein muß, und für gerades k gäbe es genau einen Knotenpunkt ungerader Valenz, für ungerades k genau $2m - 1$ solche Knotenpunkte; daher gilt $v(x) = k$ für alle x, und unser Satz ist bewiesen.

Wir müssen also nur zeigen, daß die Annahme, daß zwei Knotenpunkte x_1 und x_2 von $G^{(2m)}$ mit $v(x_1) < k$, $v(x_2) < k$ (also $v(x_1) = v(x_2) = k - 1$) existieren, zu einem Widerspruch führt. Zuerst behaupte ich

Lemma 1. *Alle Knotenpunkte mit* $v(x) < k$ *von* $G^{(2m)}$ *sind in* $K(x_1, l-2) \cap K(x_2, l-2)$ *enthalten.*

Es genügt, dies für $K(x_1, l-2)$ zu zeigen. Wenn entgegen unserer Annahme $x \notin K(x_1, l-2)$ und $v(x) < k$ gilt, so befriedigt offenbar $G^{(2m)} + (x_1, x)$ die Bedingungen (I) und (II) ((I) wegen $v(x_1) < k$, $v(x) < k$ und (II) wegen $x \notin K(x_1, l-2)$). Das widerspricht aber der Maximalitätseigenschaft (III) für $G^{(2m)}$, und damit ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 2. *Es sei* x *ein Knotenpunkt von* $G^{(2m)}$ *mit* $v(x) < k$. *Dann gilt*

$$\overline{\overline{K(x, r)}} \leqq \sum_{t=0}^{r} (k-1)^t. \tag{3}$$

Wegen $v(x) < k$ folgt (3) für $r = 1$. Für $r > 1$ folgt (3) aus $v(x_i) \leqq k$ durch einen leichten Induktionsschluß nach r.

Aus Lemma 1 und 2 folgt nun

$$\overline{\overline{K(x_1, l-2) \cup K(x_2, l-2)}} \leqq m; \tag{4}$$

Offenbar folgt aus (3) und Lemma 1

$$\overline{\overline{K(x_1, l-2) \cup K(x_2, l-2)}} = \overline{\overline{K(x_1, l-2)}} + \overline{\overline{K(x_2, l-2)}} - \overline{\overline{K(x_1, l-2) \cap K(x_2, l-2)}}$$
$$\leqq 2 \sum_{t=0}^{l-2} (k-1)^t - 2 \leqq m$$

(wegen Lemma 1 und wegen $v(x_1) < k$, $v(x_2) < k$ ist $\overline{\overline{K(x_1, l-2) \cap K(x_2, l-2)}} \geqq 2$). Also ist (4) bewiesen.

Es seien nun $x_1, \ldots, x_p$ die Knotenpunkte, die in $K(x_1, l-2) \cup K(x_2, l-2)$ enthalten sind, und $y_1, \ldots, y_{2m-p}$ seien die übrigen Knotenpunkte von $G^{(2m)}$. Aus (4) folgt

$$2m - p \geqq p. \tag{5}$$

Nun wollen wir zeigen, daß mindestens zwei der y_j durch eine Kante verbunden sind. Zunächst folgt wegen Lemma 1 $v(y_j) = k$, $1 \leqq j \leqq 2m - p$.

Wenn keine zwei der y_j durch eine Kante verbunden wären, so würden $k(2m - p)$ Kanten die y_j mit den x_i verbinden. Wegen (5) und $v(y_j) = k$ $(1 \leqq j \leqq 2m - p)$ würde aber dann $v(x_i) = k$ für $1 \leqq i \leqq p$ folgen, und das widerspricht $v(x_1) < k$.

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Kante (y_1, y_2) in $G^{(2m)}$ vorkommt. Betrachten wir jetzt den Graphen $(G^{(2m)} - (y_1, y_2) + (x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \bar{G}^{(2m)}$ (die Kanten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) kommen offenbar nicht in $G^{(2m)}$ vor). Ich behaupte, daß $\bar{G}^{(2m)}$ (I) und (II) befriedigt. Für (I) ist dies klar. Wenn $\bar{G}^{(2m)}$ einen Kreis der Länge $< l$ enthielte, so müßte in diesem Kreis eine (oder beide) der Kanten (x_1, y_1), (x_2, y_2) vorkommen. Es gilt aber wegen der Definition der y_j

$$\begin{aligned} &e(G^{(2m)}; x_1, y_1) \geqq l - 1 \\ &e(G^{(2m)}; x_2, y_2) \geqq l - 1 \\ &e(G^{(2m)} - (y_1, y_2); y_1, y_2) \geqq l - 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Die letzte Ungleichung von (6) folgt aus der Tatsache, daß in $G^{(2m)}$ kein Kreis der Länge $< l$ vorkommt. Aus (6) folgt leicht, daß $\bar{G}^{(2m)}$ (II) befriedigt. Das aber widerspricht (III), da $\bar{G}^{(2m)}$ mehr Kanten hat als $G^{(2m)}$.

Also kann $G^{(2m)}$ höchstens einen Knotenpunkt der Valenz $< k$ haben, und damit ist alles bewiesen.

Bemerkungen

1) Man könnte die obere Abschätzung in (1) noch etwas verschärfen, wenn man in Betracht zieht, daß der von den Knotenpunkten $K(x_1, l-2) \cup K(x_2, l-2)$ aufgespannte Teilgraph von $G^{(2m)}$ mindestens $\overline{\overline{K(x_1, l-2) \cup K(x_2, l-2)}} - 1$ Kanten hat, aber das wäre ziemlich unbedeutend.

2) Auch die untere Abschätzung in (1) läßt sich mittels einer von F. Kárteszi [2] angegebenen Methode für gerades $l = 2q$ verschärfen: Es seien x und y zwei durch eine Kante verbundene Knotenpunkte eines $G^{(n)}(k, 2q)$; dann ist jeder Knotenpunkt z von $G^{(n)}(k, 2q)$, dessen Abstand e von x oder $y \leqq q-1$ ist, offenbar mit genau einem der Knotenpunkte x, y durch einen Kantenzug der Länge e verbunden, und zwar durch genau einen solchen Kantenzug, denn in jedem anderen Falle ergäbe sich ein Kreis der Länge $< l$. Hieraus schließen wir, daß $G^{(n)}(k, 2q)$ einen Baum von der in Abb. 1 angegebenen Art enthält. Daraus folgt:

$$n \geqq 2 + 2(k-1) + 2(k-1)^2 + \ldots + 2(k-1)^{q-1}$$
$$= 2\{(k-1)^q - 1\} / (k-2),$$

so daß

$$(7) \qquad f(k, 2q) \geqq 2\frac{(k-1)^q - 1}{k-2},$$

und diese Schranke ist um $(k-1)^{q-1}$ größer als die in (1) angegebene untere Schranke

$$1 + k\sum_{t=0}^{q-2}(k-1)^t = \{k(k-1)^{q-1} - 2\} / (k-2).$$

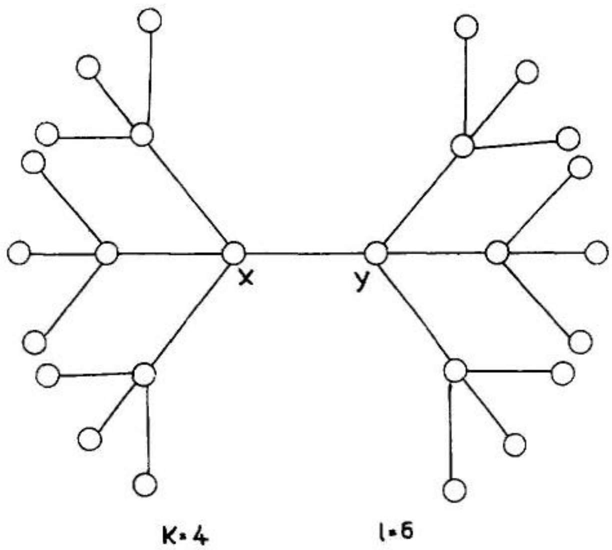

Abb. 1

3) Wir wollen noch die uns bekannten Fälle zusammenstellen, in denen man $f(k, l)$ explizit angeben kann.

Werden Mehrfachkanten zugelassen, so ist es auch sinnvoll, den Fall $l = 2$ zu betrachten.

Beginnen wir mit den trivialen Fällen.

a) $k = 2$. Offenbar ist

$$(8) \qquad f(2, l) = l,$$

die Graphen $G^{(l)}(2, l)$ sind (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt, nämlich Kreise der Länge l.

b) $l = 2$. Offenbar ist

$$(9) \qquad f(k, 2) = 2.$$

Die Graphen $G^{(2)}(k, 2)$ sind eindeutig bestimmt, sie bestehen aus zwei Knotenpunkten und k die beiden Knotenpunkte miteinander verbindenden Kanten.

c) $l = 3$. Wie am Anfang der Arbeit bemerkt wurde, ist

$$(10) \qquad f(k, 3) = k + 1,$$

die Graphen $G^{(k-1)}(k, 3)$ sind eindeutig bestimmt, nämlich die aus $k+1$ Knotenpunkten und $\binom{k+1}{2}$ diese Knotenpunkte paarweise miteinander verbindenden Kanten bestehenden vollständigen Graphen.

d) $l = 4$. Nach einer mündlichen Mitteilung von L. Pósa (Budapest) ist

$$(11) \qquad f(k, 4) = 2k.$$

Beweis: Wegen (7) ist $f(k, 4) \geqq 2k$, und es ist auch $f(k, 4) \leqq 2k$, denn es gibt einen $G^{(2k)}(k, 4)$, nämlich den paaren Graphen mit den $2k$ Knotenpunkten

$$x_1, x_2, \ldots, x_k; \quad y_1, y_2, \ldots, y_k$$

und den k^2 Kanten

$$(x_i, y_j) \quad (i = 1, 2, \ldots, k; \quad j = 1, 2, \ldots, k).$$

Wieder sind die Graphen $G^{(2k)}(k, 4)$ eindeutig bestimmt, wie man sich auf Grund von Bemerkung 2 leicht klarmachen kann.

e) $l = 5$. Aus (1) ergibt sich unmittelbar

$f(k, 5) \geqq k^2 + 1$. A. J. Hoffman und R. R. Singleton [1] haben bewiesen:

$$(12) \qquad \begin{cases} f(k, 5) = k^2 + 1 & \text{für } k = 2, 3, 7 \\ f(k, 5) > k^2 + 1 & \text{für } k \neq 2, 3, 7 \text{ und } 57; \end{cases}$$

im Falle $k = 57$ ist die Frage nicht geklärt.

f) $l = 6$. F. Kárteszi [2] konnte zeigen:

Ist p eine beliebige Primzahl und r eine beliebige natürliche Zahl, so gilt

$$(13) \qquad f(1 + p^r, 6) = 2(1 + p^r + p^{2r}).$$

g) $l = 7$. Nach [1] ist für $k > 2$ stets $f(k, 7)$ größer als die untere Schranke (1).

h) $k = 3$. Hier ist nach W. T. Tutte [5] und W. F. Mc Gee [3] $f(3, l)$ in den Fällen $l = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ bekannt; wir geben für diese Werte von l die Größe $f(3, l)$ sowie die Schranken, welche sich aus (1) bzw. (7) ergeben, an:

$$\begin{aligned} 2 &\leqq f(3, 2) = 2 \\ 4 &\leqq f(3, 3) = 4 \leqq 8 \\ 6 &\leqq f(3, 4) = 6 \leqq 24 \\ 10 &\leqq f(3, 5) = 10 \leqq 56 \\ 14 &\leqq f(3, 6) = 14 \leqq 120 \\ 22 &\leqq f(3, 7) = 24 \leqq 248 \\ 30 &\leqq f(3, 8) = 30 \leqq 504. \end{aligned}$$

Für $l > 8$ ist $f(3, l)$ stets größer als die untere Schranke (1) bzw. (7).

Es zeigt sich, daß in allen Fällen, in denen wir $f(k, l)$ kennen (mit Ausnahme von $k = 3$, $l = 7$), stets $f(k, l)$ gleich der durch (1) bzw. (7) gegebenen unteren Schranke ist. Liegt dieser Fall vor und ist l gerade, so besteht jeder Graph $G^{(n)}(k, l)$ mit $n = f(k, l)$ offenbar aus dem in Bemerkung 2 genannten Baum (Abb. 1) und gewissen Kanten, welche Knotenpunkte miteinander verbinden, deren Abstand in dem Baum gleich $l-1$ ist; daraus folgt, daß dann $G^{(n)}(k, l)$ ein paarer Graph ist (wie man in den bekannten Fällen leicht unmittelbar nachprüfen kann). Es entsteht folgende Frage:

Gibt es eine Zahl $k \geqq 3$ und eine gerade Zahl $l \geqq 6$ so, daß einer der Graphen $G^{(n)}(k, l)$ mit minimaler Knotenzahl n kein paarer Graph ist?

II. Einige Eigenschaften der Minimalgraphen

Für das Folgende wird nur die Existenz von Graphen $G^{(n)}(k, l)$ für beliebige natürliche Zahlen $k \geqq 2$, $l \geqq 3$ und geeignetes n vorausgesetzt; diese kann man aus Teil I dieser Arbeit oder, unabhängig hiervon, auch aus [4] entnehmen.

Wir wollen einige Eigenschaften derjenigen Graphen $G^{(n)}(k, l)$, für welche n seinen kleinstmöglichen Wert $f(k, l)$ hat, zusammenstellen; diese Graphen werden im Folgenden als Minimalgraphen bezeichnet. – Es sei durchweg $k \geqq 2$, $l \geqq 3$.

(A) *Der Abstand zweier beliebiger Knotenpunkte eines Minimalgraphen $G^{(n)}(k, l)$ ist $\leqq l$.*

Beweis: Angenommen, es gäbe in $G^{(n)}(k, l)$ zwei Knotenpunkte x, y, deren Abstand $> l$ ist. x sei mit den Knotenpunkten $x_1, \ldots, x_k$, y sei mit den Knotenpunkten $y_1, \ldots, y_k$ durch je eine Kante verbunden. Dann betrachten wir den Graphen G', welcher aus $G^{(n)}(k, l)$ entsteht, wenn wir die Knotenpunkte x und y sowie die sämtlichen von ihnen ausgehenden Kanten löschen und statt derer die Kanten $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ einführen. G' erweist sich als ein (eventuell in mehrere getrennte Teile zerfallender) $G^{(n-2)}(k, l)$, also ist n nicht die minimale Knotenzahl – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Folgerung aus (A):

$$(14) \qquad f(k, l) \leqq \frac{k(k-1)^l - 2}{k-2} \qquad (k > 2).$$

Das ergibt sich aus (A) mittels eines (schon in I benutzten) leichten Induktionsschlusses, denn wegen (A) besitzt der Minimalgraph nicht mehr als

$$1 + k + k(k-1) + \ldots + k(k-1)^{l-1} = 1 + k\,\{(k-1)^l - 1\} \,/\, (k-2) = \{k(k-1)^l - 2\} \,/\, (k-2)$$

Knotenpunkte. Die so gewonnene obere Schranke für $f(k, l)$ ist von ähnlicher Art wie die in (1) von Erdös angegebene obere Schranke

$$4 \sum_{t=1}^{l-2} (k-1)^t = 4 \left\{ \frac{(k-1)^{l-1} - 1}{k-2} - 1 \right\},$$

jedoch weniger gut als diese.

(B) *Es sei $k = 2h$ gerade und x ein beliebiger Knotenpunkt eines Minimalgraphen $G^{(n)}(k, l)$. Dann gilt: Die Anzahl derjenigen Kanten von $G^{(n)}(k, l)$, welche je zwei Knotenpunkte verbinden, die beide von x den Abstand l haben, ist $< h$.*

Beweis: Angenommen, (B) sei falsch. Dann gibt es in $G^{(n)}(k, l)$ einen Knotenpunkt x und h Kanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_h$, deren beide Endknotenpunkte von x den Abstand l haben. Die (nicht notwendig verschiedenen) Endknotenpunkte dieser Kanten seien $y_1, \ldots, y_{2h}$. Der Knotenpunkt x sei mit den Knotenpunkten $x_1, \ldots, x_{2h}$ durch je eine Kante verbunden. Wir betrachten den Graphen G'', welcher aus $G^{(n)}(k, l)$ entsteht, wenn wir die sämtlichen Kanten $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_h$ sowie den Knotenpunkt x und die von ihm ausgehenden Kanten löschen und statt derer die Kanten $(x_1, y_1), \ldots, (x_{2h}, y_{2h})$ einführen. G'' erweist sich als ein $G^{(n-1)}(k, l)$, also ist n nicht die minimale Knotenzahl – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aus (B) folgern wir

(C) *Es sei $k = 2h$ gerade und x ein beliebiger Knotenpunkt eines Minimalgraphen $G^{(n)}(k, l)$. Dann ist die Anzahl u derjenigen Knotenpunkte von $G^{(n)}(k, l)$, die von x den Abstand l haben, $\leqq (k-1)^{l-1}$.*

Beweis: Ist $u = 0$, so ist (C) gewiß richtig; wir dürfen daher $u \geqq 1$ voraussetzen. Es seien v die Anzahl der Knotenpunkte von $G^{(n)}(k, l)$, die von x den Abstand $l-1$ haben, und q die Anzahl der Kanten, welche zwei Knotenpunkte vom Abstand l und $l-1$ von x miteinander verbinden. Dann ist wegen (B)

$$q \geqq uk - 2(h-1) = (u-1) \cdot 2h + 2,$$

andrerseits gilt

$$q \leqq v(k-1) = v(2h-1),$$

so daß

$$(u-1) \cdot 2h + 2 \leqq v \cdot (2h-1).$$

Setzt man hierin eine obere Schranke für v ein, so bekommt man eine obere Schranke für u. Nach dem schon mehrfach benutzten Induktionsschluß ist gewiß

$$v \leqq k(k-1)^{l-2} = 2h \cdot (2h-1)^{l-2},$$

so daß sich der Reihe nach ergibt:

$$\begin{aligned} (u-1) \cdot 2h + 2 &\leqq 2h \cdot (2h-1)^{l-2}(2h-1), \\ (u-1) \cdot h &< h \cdot (2h-1)^{l-1}, \\ u - 1 &< (k-1)^{l-1}, \\ u &\leqq (k-1)^{l-1}, \end{aligned}$$

wie behauptet wurde.

Folgerung aus (C):

Die obere Schranke (14) läßt sich im Falle $k = 2h$ $(h > 1)$ verbessern, denn wegen (A) und (C) besitzt ein Minimalgraph $G^{(n)}(2h, l)$ nicht mehr als

$$\begin{aligned} &1 + k + k(k-1) + \ldots + k(k-1)^{l-2} + (k-1)^{l-1} \\ &= 1 + k\{(k-1)^{l-1} - 1\} / (k-2) + (k-1)^{l-1} \\ &= 2\{(k-1)^{l} - 1\} / (k-2) = \{(2h-1)^{l} - 1\} / (h-1) \end{aligned}$$

Knotenpunkte, so daß also

$$f(2h, l) \leqq \frac{(2h-1)^{l} - 1}{h-1} \quad (h > 1). \tag{15}$$

Aber auch diese obere Schranke ist weniger gut als die obere Schranke (1).

(D) *Durch jede Kante eines Minimalgraphen $G^{(n)}(k, l)$ gehen mindestens $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ Kreise der Länge $\leqq l + 1$.*

Beweis: In den Fällen $l = 3$ und $l = 4$ können wir uns unmittelbar von der Richtigkeit der Behauptung überzeugen und dürfen daher $l > 4$ voraussetzen.

Angenommen, (D) sei falsch. Dann gibt es in $G^{(n)}(k, l)$ eine Kante (x, y), durch welche weniger als $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ Kreise der Länge $\leqq l + 1$ gehen. x sei außer mit y noch mit den Knotenpunkten $x_1, \ldots, x_{k-1}$, y sei außer mit x noch mit den Knotenpunkten $y_1, \ldots, y_{k-1}$ durch je eine Kante verbunden; wegen $l > 4$ sind keine zwei der Knotenpunkte $x_1, \ldots, x_{k-1}$; $y_1, \ldots, y_{k-1}$ identisch oder durch eine Kante verbunden. Die Numerierung der $x_1, \ldots, x_{k-1}$; $y_1, \ldots, y_{k-1}$ sei so vorgenommen, daß für $i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{k}{2}\right]$ jeder Kreis, der die Kanten (x_i, x) und (x, y) enthält, sowie jeder Kreis, der die Kanten (x, y) und (y, y_{k-i}) enthält, eine Länge $> l + 1$ hat (man kann gewiß so numerieren, weil man im anderen Falle schließen könnte, daß doch die Kante (x, y) in mindestens $k - \left[\frac{k}{2}\right] = \left[\frac{k+1}{2}\right]$ Kreisen der Länge $\leqq l+1$ enthalten ist). Dann gilt für $j = 1, 2, \ldots, k-1$, daß jeder Kreis, welcher durch die Kanten (x_j, x), (x, y), (y, y_j) geht, eine Länge $> l+1$ hat. Wir betrachten den Graphen G^*, welcher aus $G^{(n)}(k, l)$ entsteht, wenn wir die Knotenpunkte x und y sowie die sämtlichen von ihnen ausgehenden Kanten löschen und statt derer die Kanten (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_{k-1}, y_{k-1}) einführen. G^* erweist sich als ein $G^{(n-2)}(k, l)$, also ist n nicht die minimale Knotenzahl – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Folgerung aus (D):

(E) *Ein Minimalgraph besitzt keine Brücke.*

Eigenschaft (E) ergibt sich auch aus folgender Eigenschaft:

(F) *Ein Minimalgraph $G^{(n)}(k, l)$ besitzt keinen Zerfällungsknotenpunkt.*

(Ein Knotenpunkt x eines zusammenhängenden Graphen G heißt Zerfällungsknotenpunkt (oder Artikulation) von G, wenn G durch Löschung von x und der von x ausgehenden Kanten in mehrere getrennte Teile zerfällt.)

Beweis: Angenommen, $G^{(n)}(k, l)$ zerfalle durch Löschung eines Knotenpunktes z und der von z ausgehenden Kanten in mehrere getrennte Teile, von denen etwa $\bar{G}$ die minimale Knotenzahl $\bar{n}$ haben möge; dann ist offenbar $2\bar{n} < n$. z sei in $G^{(n)}(k, l)$ mit den Knotenpunkten $z_1, \ldots, z_p$ $(p < k)$ von $\bar{G}$ durch je eine Kante verbunden. $\bar{G}'$, $\bar{G}''$ seien zwei zu $\bar{G}$ isomorphe Graphen, wobei die Knotenpunkte $z_1', \ldots, z_p'$ von $\bar{G}'$ und $z''_1, \ldots, z_p''$ von $\bar{G}''$ bzw. den Knotenpunkten $z_1, \ldots, z_p$ von $\bar{G}$ entsprechen mögen. Dann betrachten wir den Graphen G^{**}, welcher entsteht, wenn $\bar{G}'$ und $\bar{G}''$ durch die Kanten (z_1', z_1''), (z_2', z_2''), $\ldots$, (z_p', z_p'') miteinander verbunden werden. G^{**} erweist sich als ein $G^{(2\bar{n})}(k, l)$, also ist n nicht die minimale Knotenzahl – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Weiter folgt leicht aus (D):

(G) *Durch jeden Knotenpunkt eines Minimalgraphen $G^{(n)}(k, l)$ gehen mindestens $\left[\frac{1}{2}\left(k\left[\frac{k+1}{2}\right]+1\right)\right]$ Kreise der Länge $\leqq l+1$.*

Beweis: Der beliebige Knotenpunkt x von $G^{(n)}(k, l)$ habe die Nachbarknotenpunkte $x_1, \ldots, x_k$, durch die Kante (x, x_i) mögen genau c_i Kreise der Länge $\leqq l+1$ gehen $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Ist dann c die Anzahl aller durch x gehenden Kreise der Länge $\leqq l+1$, so gilt offenbar

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_k = 2c;$$

wegen (D) ist

$$c_i \geqq \left[\frac{k+1}{2}\right], \text{ folglich } 2c \geqq k\left[\frac{k+1}{2}\right],$$

und daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung (G).

Die Aussage (G) kann durch zwei weitere Aussagen präzisiert werden:

(H) *Es sei $k = 2h$ gerade und x ein beliebiger Knotenpunkt eines Minimalgraphen $G^{(n)}(k, l)$. Dann sind mindestens $h+1$ der von x ausgehenden Kanten je in einem Kreis der Länge l enthalten.*

Durch x gehen also mindestens $\left[\frac{h}{2}\right]+1$ Kreise der Länge l.

Beweis: Im Falle $l = 3$ ist die Behauptung gewiß richtig, wir dürfen daher $l > 3$ voraussetzen. Angenommen, (H) sei falsch. Dann gibt es in $G^{(n)}(k, l)$ einen Knotenpunkt x derart, daß mindestens h der von x ausgehenden Kanten keinem Kreise der Länge l angehören. x sei mit den Knotenpunkten $x_1, \ldots, x_{2h}$ durch je eine Kante verbunden, wobei die Numerierung so gewählt sei, daß keine der Kanten $(x, x_1), \ldots, (x, x_h)$ einem Kreise der Länge l angehört. Wegen $l > 3$ sind keine zwei der Knotenpunkte x_i $(i = 1, \ldots, k)$ identisch oder durch eine Kante verbunden. Wir betrachten den Graphen G^0, welcher aus $G^{(n)}(k, l)$ entsteht, wenn wir den Knotenpunkt x sowie die sämtlichen von ihm ausgehenden Kanten löschen und statt derer die Kanten (x_1, x_{h+1}), (x_2, x_{h+2}), $\ldots$, (x_h, x_{2h}) einführen. G^0 erweist sich als ein $G^{(n-1)}(k, l)$, also ist n nicht die minimale Knotenzahl – im Widerspruch zur Voraussetzung.

(J) *Es sei $k = 2h+1$ ungerade, und es seien x und y zwei beliebige, durch eine Kante verbundene Knotenpunkte eines Minimalgraphen $G^{(n)}(k, l)$. Dann hat mindestens einer der Knotenpunkte x, y folgende Eigenschaft: Von den $2h$ von diesem Knotenpunkt ausgehenden, von der Verbindungskante (x, y) verschiedenen Kanten sind mindestens $h+1$ je in einem Kreise der Länge l enthalten, welcher nicht durch (x, y) geht.*

Durch x oder y gehen also mindestens $\left[\frac{h}{2}\right]+1$ Kreise der Länge l, welche die Kante (x, y) nicht enthalten.

Beweis: In den Fällen $l = 3$ und $l = 4$ ist die Behauptung gewiß richtig, wir dürfen daher $l > 4$ voraussetzen. Angenommen, (J) sei falsch. Dann gibt es in $G^{(n)}(k, l)$ zwei durch eine Kante verbundene Knotenpunkte x, y

mit der Eigenschaft, daß in $G^{(n)}(k,l) - (x,y)$ sowohl von x als auch von y je mindestens h Kanten ausgehen, welche keinem Kreise der Länge l angehören. x sei (außer mit y) mit den Knotenpunkten $x_1, \ldots, x_{2h}$, y sei (außer mit x) mit den Knotenpunkten $y_1, \ldots, y_{2h}$ durch je eine Kante verbunden, wobei die Numerierung so gewählt sei, daß keine der Kanten $(x, x_1), \ldots, (x, x_h)$; $(y, y_1), \ldots, (y, y_h)$ in $G^{(n)}(k,l) - (x,y)$ einem Kreise der Länge l angehört. Wegen $l > 4$ sind keine zwei der Knotenpunkte x_i, y_j $(i, j = 1, 2, \ldots, 2h)$ identisch oder durch eine Kante verbunden. Wir betrachten den Graphen G^{00}, welcher aus $G^{(n)}(k,l)$ entsteht, wenn wir die Knotenpunkte x, y sowie die sämtlichen von ihnen ausgehenden Kanten löschen und statt derer die Kanten $(x_1, x_{h+1}), (x_2, x_{h+2}), \ldots, (x_h, x_{2h})$; $(y_1, y_{h+1}), (y_2, y_{h+2}), \ldots, (y_h, y_{2h})$ einführen. G^{00} erweist sich als ein $G^{(n-2)}(k,l)$, also ist n nicht die minimale Knotenzahl – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Bemerkung: *Es entsteht hier die Frage, ob für geeignete Zahlen h und l ein Minimalgraph $G^{(n)}(2h+1, l)$ existiert, welcher einen Knotenpunkt besitzt, durch den **kein** Kreis der Länge l geht.*

Folgerung aus (H) und (J):

(K) *Ein Minimalgraph $G^{(n)}(k,l)$ hat die Taillenweite l.*

Wir schließen daraus:

Satz 2: *Zu zwei beliebigen natürlichen Zahlen $k \geqq 2$, $l \geqq 3$ existieren stets reguläre Graphen der Valenz k und der Taillenweite l* (vgl. dazu [4]).

Ein regulärer Graph der Valenz k und der Taillenweite l minimaler Knotenzahl ist zugleich ein Minimalgraph $G^{(n)}(k,l)$ mit $n = f(k,l)$ und hat folglich, falls k gerade ist, die Eigenschaften (A) *bis* (H), *und falls k ungerade ist, die Eigenschaften* (A), (D), (E), (F), (G) *und* (J). *Seine Knotenzahl $f(k,l)$ genügt den Ungleichungen* (1) *und – falls l gerade ist –* (7). (Siehe auch (17) am Schluß der Arbeit.)

Bemerkung: Die Abschätzungen (14) und (15) können mittels (D), (G) und (H) bzw. (J) leicht verschärft werden, wir wollen jedoch hierauf nicht näher eingehen.

Bemerkung): Zwischen $f(k, 2q+1)$ und $f(k, 2q+2)$ besteht folgende Relation:*

$$f(k, 2q+2) \leqq 2 f(k, 2q+1) \quad (q = 1, 2, 3, \ldots) \tag{16}$$

Beweis: Es seien $G = G^{(n)}(k, 2q+1)$ ein Minimalgraph und G', G'' zwei zu G isomorphe Graphen. G' enthalte die Kante (a', b'), dieser entspreche auf Grund der Isomorphie in G'' die Kante (a'', b''). Wir löschen die Kanten (a', b') und (a'', b'') und führen an ihrer Stelle neue Kanten (a', b''), (a'', b') ein, und so verfahren wir mit jedem Paar einander entsprechender Kanten von G' und G''. Der entstehende Graph $\bar{G}$ hat $2n$ Knotenpunkte und ist regulär von der Valenz k, seine Taillenweite ist nicht kleiner als diejenige von G, und da er offenbar ein paarer Graph ist, enthält er keinen Kreis ungerader Länge. Daraus folgt sogleich, daß $\bar{G}$ ein $G^{(2n)}(k, 2q+2)$ ist, und mithin ist $f(k, 2q+2) \leqq 2n$; das war zu beweisen.

Aus (16) und (1) schließen wir:

$$f(k, 2q+2) \leqq 8 \sum_{t=1}^{2q-1} (k-1)^t = 8\,\{(k-1)^{2q} - 1\} / (k-2) - 8,$$

und diese Schranke ist besser als die obere Schranke (1) für gerades l.

Fassen wir die gewonnenen Abschätzungen (1), (7) und (16) zusammen:

$$\left\{\begin{aligned} 1 + k\,\frac{(k-1)^q - 1}{k-2} &\leqq f(k, 2q+1) \leqq 4\left\{\frac{(k-1)^{2q} - 1}{k-2} - 1\right\} \\ 2\,\frac{(k-1)^{q+1} - 1}{k-2} &\leqq f(k, 2q+2) \leqq 8\left\{\frac{(k-1)^{2q} - 1}{k-2} - 1\right\} \end{aligned}\right. \tag{17}$$

$$(q = 1, 2, 3, \ldots)$$

*) Nachtrag während des Drucks. H. S.

LITERATUR

[1] HOFFMAN, A. J., and SINGLETON, R. R.: On Moore graphs with diameters two and three. I. B. M. Journal of Research and Development **4** (1960), 497–504.

[2] KÁRTESZI, F.: Piani finiti ciclici come risoluzioni di un certo problema di minimo. Boll. Un. Mat. Ital. (3) **15** (1960), 522–528; siehe auch: Mat. Lapok **11** (1960), 323–329 (ungarisch).

[3] MC GEE, W. F.: A minimal cubic graph of girth seven. Canad. Math. Bull. **3** (1960), 149–152.

[4] SACHS, H.: Regular graphs with given girth and restricted circuits. Jour. London Math. Soc. (im Druck).

[5] TUTTE, W. T.: A family of cubical graphs. Proc. Cambridge Phil. Soc. **43** (1947), 459–474.

Verfasser:

ERDÖS, Paul – Mathematik,
Budapest, z. Z. University College, London.

SACHS, Horst – Mathematik,
Dr. rer. nat. (Prom. 1958 Halle), Oberassistent am I. Mathem. Instit., Lehrbeauftragter a. d. Math. Nat. Fak. der Univ. Halle